Revista de Matematică din Timişoara

Fondată în 1921
de
Traian Lalescu

RMT

ANUL XXIII (SERIA a IV-a), NR. 4/2018

EDITURA BÎRCHI

CÂTEVA PROBLEME PRIVIND CALCULUL UNOR MĂSURI DE UNGHIURI ÎNTR-UN TRIUNGHI ISOSCEL

de ION PĂTRAŞCU, CRAIOVA şi FLORENTIN SMARANDACHE, GALLUP, S.U.A.

În acest articol, rezolvăm cu ajutorul unei leme o categorie de probleme privind calculul măsurilor unor unghiuri determinate de anumite ceviene într-un triunghi isoscel.

Lemă

Dacă $ABCD$ este un patrulater convex cu proprietăţile:
(i) $DA = DC$ şi
(ii) $m(\widehat{ADC}) + 2m(\widehat{ABC}) = 360°$,
atunci punctul D este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstraţie:

Construim pe semidreapta $(BD$ punctul E astfel încât D este între B şi E, iar $DE = DA$ (vezi *Fig. 1*). Notăm $m(\widehat{AED}) = \alpha$ şi $m(\widehat{CED}) = \beta$. Avem: $m(\widehat{ADB}) = 2\alpha$, $m(\widehat{BDC}) = 2\beta$.
Relaţia (ii) devine $2m(\widehat{ABC}) + 2(\alpha + \beta) = 360°$. Ea se rescrie $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{AEC}) = 180°$, ceea ce arată că patrulaterul $ABCE$ este inscriptibil. Această concluzie şi faptul că D este centrul cercului circumscris triunghiului ACE conduc la demonstrarea afirmaţiei că D este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

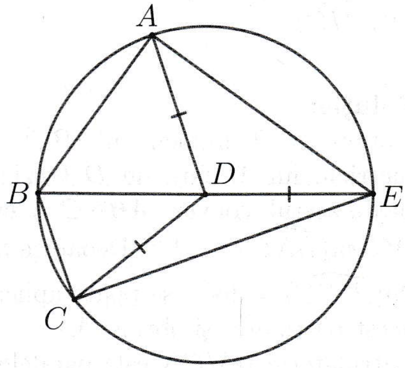


Figura 1

APLICAŢII

Problema 1.

Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, cu $m(\widehat{A}) = 90°$. Se consideră punctul M în semiplanul determinat de BC şi care nu conţine vârful A, astfel încât $m(\widehat{MBC}) = 15°$ şi $m(\widehat{MCB}) = 30°$. Calculaţi $m(\widehat{MAC})$.

Ion Pătraşcu

Soluţie:
Deoarece $AB = AC$, $m(\widehat{A}) = 90°$ şi $m(\widehat{BMC}) = 135°$, sunt verificate condiţiile din ipoteza **Lemei**. Aplicând **Lema**, rezultă $AM = AB = AC$. În triunghiul isoscel AMC, avem $m(\widehat{ACM}) = 75°$, apoi găsim $m(\widehat{MAC}) = 30°$.

Problema 2.
Fie ABC un triunghi isoscel cu $m(\widehat{ABC}) = 150°$. Se consideră punctul M astfel încât $m(\widehat{MAC}) = 30°$, $m(\widehat{MCA}) = 45°$, iar dreapta AC separă punctele B şi M. Demonstraţi că $MB \perp AB$.

Ion Pătraşcu

Soluţie:
Găsim $m(\widehat{AMC}) = 105°$; avem: $m(\widehat{ABC}) + 2m(\widehat{AMC}) = 150° + 210° = 360°$. De asemenea, $BA = BC$, prin urmare patrulaterul convex $BAMC$ satisface condiţiile de aplicabilitate ale **Lemei**. Rezultă că $BM = BC = BA$. În triunghiul isoscel BMA, avem $m(\widehat{BAM}) = 15° + 30° = 45°$, deci acest triunghi este dreptunghic isoscel. În consecinţă, $MB \perp AB$.

Problema 3.
Fie ABC un triunghi cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{A}) = 80°$. Considerăm M un punct în interiorul triunghiului astfel încât $m(\widehat{MBC}) = 30°$ şi $m(\widehat{MCB}) = 10°$. Calculaţi $m(\widehat{AMC})$.

I. F. Sharygin [2]

Soluţie:
Notăm cu D mijlocul lui $[BC]$ şi cu N simetricul lui M faţă de D (vezi *Fig. 2*). În patrulaterul convex $ABNC$ avem: $AB = AC$, $m(\widehat{BNC}) = 140°$. Deoarece $m(\widehat{BAC}) + 2m(\widehat{BNC}) = 360°$, se poate aplica **Lema** în acest patrulater şi obţine $AN = AC$.
Patrulaterul $BMCN$ este paralelogram, deci $BN = MC$ şi $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{MCN}) = 40°$. Deoarece $m(\widehat{BCA}) = 50°$, găsim că $m(\widehat{ACN}) = 80°$. Însă $m(\widehat{BNC}) = 140°$, deci $m(\widehat{BNA}) = 140° - 80° = 60°$. Triunghiul isoscel ABN, având $m(\widehat{ANB}) = 60°$,

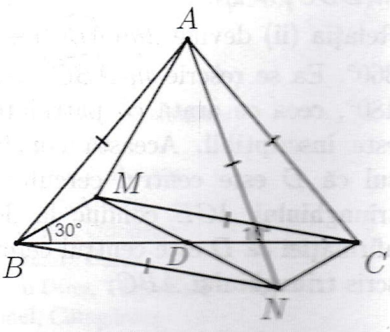


Figura 2

este echilateral, prin urmare $BN = AN$. Triunghiul CMA este isoscel, $CM = CA$, având $m(\widehat{MCA}) = 40°$, deci $m(\widehat{CMA}) = 70°$.

Problema 4.
Fie ABC un triunghi cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) = 106°$. Considerăm punctul M

în interiorul triunghiului astfel încât $m(\widehat{MBA}) = 7^\circ$ şi $m(\widehat{MCB}) = 23^\circ$. Calculaţi $m(\widehat{AMC})$.

Ion Pătraşcu

Soluţie:
Notăm cu D mijlocul laturii BC şi cu N simetricul lui M faţă de D. Patrulaterul $BMCN$ este paralelogram, $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{CBN}) = 30^\circ + 23^\circ = 53^\circ$, deci $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{BNC}) = 127^\circ$. Având $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) + 2m(\widehat{BNC}) = 106^\circ + 2 \cdot 127^\circ = 360^\circ$ în patrulaterul convex $ABNC$, putem aplica **Lema**. În consecinţă, $AN = AB$. Triunghiul isoscel ABN are $m(\widehat{ABN}) = 7^\circ + 53^\circ = 60^\circ$, prin urmare este echilateral. Deoarece $BN = CM = AC$, obţinem că triunghiul CAM este isoscel şi găsim $m(\widehat{AMC}) = 83^\circ$.

Problema 5. (generalizarea problemelor 3 şi 4)
Fie ABC un triunghi cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) = \alpha$, $60^\circ < \alpha < 120^\circ$. Considerăm punctul M în interiorul triunghiului ABC astfel încât $m(\widehat{MBC}) = 30^\circ$ şi $m(\widehat{MCB}) = \beta$, unde $2\beta + 60^\circ = \alpha$. Calculaţi $m(\widehat{AMC})$.

Ion Pătraşcu

Soluţie:
Notăm cu D mijlocul laturii BC şi cu N simetricul lui M faţă de D. Patrulaterul $BMCN$ este paralelogram, $m(\widehat{MBN}) = 30^\circ + \beta$, $m(\widehat{BNC}) = 150^\circ - \beta$. Având $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) + 2m(\widehat{BNC}) = \alpha + 300^\circ - 2\beta = 300^\circ + (\alpha - 2\beta) = 360^\circ$, se poate aplica **Lema** în patrulaterul $ABNC$. Astfel obţinem că $AB = AN = AC$. Avem $m(\widehat{ABN}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{MCB}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) + \beta = \frac{180^\circ - (\alpha - 2\beta)}{2} = 60^\circ$, deci BAN, fiind isoscel cu un unghi de 60°, este echilateral; în consecinţă, $BN = AN = AC$. Cum $BN = CM$ (laturi opuse în paralelogram), obţinem că triunghiul CAM este isoscel, cu $CM = CA$. Deoarece $m(\widehat{MCA}) = m(\widehat{ACB}) - m(\widehat{MCB})$, găsim $m(\widehat{MCA}) = \frac{180^\circ - \alpha}{2} - \beta$, însă cum $\beta = \frac{1}{2}(\alpha - 60^\circ)$, rezultă că $m(\widehat{MCA}) = 120^\circ - \alpha$. În final, obţinem $m(\widehat{AMC}) = 30^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

Observaţie:
Problema 3 se obţine din *Problema 5* pentru $\alpha = 80^\circ$ şi $\beta = 10^\circ$, iar *Problema 4* se obţine pentru $\alpha = 106^\circ$ şi $\beta = 23^\circ$.

BIBLIOGRAFIE

[1] **I. F. Izaak** – *Ne salvează cercul circumscris*, revista KVANT, nr. 2 (1987)

[2] **I. F. Sharygin** – *Problemas de geometría. Planimetria*, Ed. Mir, Moscova, 1989

[3] **I. Pătraşcu** – *Probleme de geometrie plană*, Editura Cardinal, Craiova, 1996